

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów 2022/2023

Zawody pierwszego stopnia OMJ składają się z dwóch niezależnych części.

1. Część korespondencyjna

Zadania tej części zamieszczone są poniżej. Ich rozwiązania (wszystkich lub części z nich) należy przesłać listem poleconym do właściwego Komitetu Okręgowego OMJ – bezpośrednio lub za pośrednictwem szkolnego koordynatora OMJ – najpóźniej dnia **17 października 2022 r.** (decyduje data stempla pocztowego)

2. Część testowa

W dniu **29 września 2022 r. o godz. 9.00** zostanie przeprowadzony test pisemny w szkołach, które zarejestrowały swój udział w OMJ. Wynik w zawodach pierwszego stopnia jest sumą punktów zdobytych w obu częściach: korespondencyjnej i testowej. Wszelkie szczegółowe informacje dotyczące zawodów znajdują się na stronie Olimpiady: **www.omj.edu.pl**

Uwaga: Nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań!

Każdy uczeń, który weźmie udział w teście lub prześle rozwiązanie przynajmniej jednego zadania z części korespondencyjnej, stanie się uczestnikiem Olimpiady i w zależności od uzyskanego wyniku może zostać zakwalifikowany do zawodów stopnia drugiego.

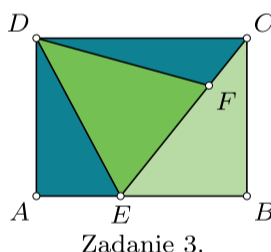
1. Dany jest prostokąt o obwodzie x cm, w którym stosunek długości boków wynosi 1:2. Załóżmy, że pole tego prostokąta jest równe x cm². Wyznacz x .

2. Kamil napisał na tablicy działanie polegające na naprzemiennym odejmowaniu i dodawaniu liczb naturalnych od 1 do 100:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 98 + 99 - 100.$$

Następnie Kamil stał jeden ze znaków $+$ lub $-$ i wpisał w jego miejsce znak $=$, uzyskując w ten sposób prawdziwą równość. Którą liczbę poprzedzał starty znak? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

3. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt E leży na boku AB , a punkt F leży na odcinku CE . Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola, to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.



4. Każdą z liczb naturalnych od 1 do n pokolorowano albo na niebiesko, albo na czerwono, przy czym każdego z tych kolorów użyto co najmniej raz. Okazało się, że:

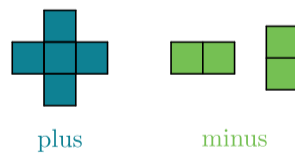
- każda liczba czerwona jest sumą pewnych dwóch różnych liczb niebieskich;
- każda liczba niebieska jest różnicą pewnych dwóch liczb czerwonych.

Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której takie kolorowanie jest możliwe.

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności

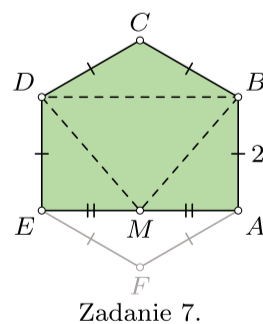
$$a + b \geq ab, \quad b + c \geq bc \quad \text{oraz} \quad c + a \geq ca.$$

Udowodnij, że $a + b + c \geq \frac{3}{4}abc$.



Zadanie 6.

6. *Plusem* nazwiemy przedstawioną na rysunku figurę złożoną z pięciu kwadratów o boku 1, a *minusem* — każdy prostokąt złożony z dwóch takich kwadratów. Czy istnieje liczba nieparzysta n o tej własności, że kwadrat o boku n można rozciąć na plusy i minusy? Odpowiedź uzasadnij.



7. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku 2. Punkt M jest środkiem przekątnej AE . Sześciokąt $ABCDEF$ zagięto wzdłuż odcinków BD, BM, DM w taki sposób, że punkty A, C oraz E spotkały się. W wyniku tej operacji otrzymano czworościan. Wyznacz jego objętość.

Terminarz XVIII Olimpiady Matematycznej Juniorów 2022/2023

zawody stopnia pierwszego
od 1 września 2022 r.
do 17 października 2022 r.

część testowa w szkołach
29 września 2022 r. godz. 9.00

zawody stopnia drugiego
14 stycznia 2023 r.

zawody stopnia trzeciego
18 marca 2023 r.

Uroczyste zakończenie OMJ
19 marca 2023 r.

Trzy powody, dla których warto wystartować w OMJ

Zostając finalistą OMJ, możesz kontynuować naukę w dowolnej szkole średniej. Zostaniesz do niej przyjęty z pominięciem standardowej procedury rekrutacyjnej.

Próbując swoich sił w OMJ, przygotowujesz się do udziału w Olimpiadzie Matematycznej w szkole średniej. Sukces w OM to przepustka na wymarzony kierunek studiów, nie tylko związany bezpośrednio z matematyką.

Udział w teście jest doskonałą okazją do sprawdzenia się w warunkach egzaminu zewnętrznego z matematyki.